MULTILINEAR FORMS ON A CLASS OF SEQUENCE SPACES

Doctoral Dissertation

by

T. Praciano-Pereira

Uppsala

UPPSALA UNIVERSITY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

1980

MULTILINEAR FORMS ON A CLASS OF SEQUENCE SPACES

Doctoral Dissertation

by

T. Praciano-Pereira

Uppsala

To be publicly examined on June 3, 1980, at 10.15 a.m., in Room 309 of the Department of Mathematics, Thunbergsvägen 3, Uppsala, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. The discussion will be held in English.

Abstract

Littlewood, [8], proved a necessary condition for bilinear forms to be continuous on ℓ^∞ and later together with Hardy, [5], extended this result to bilinear forms defined on certain ℓ^p-spaces. S. Kaijser and Davie extended the result to multilinear forms defined on ℓ^∞. In [A] the necessary condition obtained by Littlewood has been proved to be true for multilinear forms on a class of ℓ^p-spaces. Using a random estimate of the norm of tensor products we have been able to prove that the necessary condition cannot be improved, [B].

This dissertations summarizes the following papers:

[A] On bounded multilinear forms on a class of ℓ^p-spaces. U.U.D.M. Report nr. 1979:4.

[B] Le meilleur exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy. U.U.D.M. Report nr. 1980:4.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

MULTILINEAR FORMS ON A CLASS OF SEQUENCE SPACES

Doctoral Dissertation

by

T. Praciano-Pereira

Uppsala

Abstract

Littlewood, [8], proved a necessary condition for bilinear forms to be continuous on ℓ^∞ and later together with Hardy, [5], extended this result to bilinear forms defined on certain ℓ^p-spaces. S. Kaijser and Davie extended the result to multilinear forms defined on ℓ^∞. In [A] the necessary condition obtained by Littlewood has been proved to be true for multilinear forms on a class of ℓ^p-spaces. Using a random estimate of the norm of tensor products we have been able to prove that the necessary condition cannot be improved, [B].

This dissertations summarizes the following papers:

[A] On bounded multilinear forms on a class of ℓ^p-spaces. U.U.D.M. Report nr. 1979:4.

[B] Le meilleur exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy. U.U.D.M. Report nr. 1980:4.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549218_0045

Acknowledgements

This work has been done at the Department of Mathematics of the Uppsala University under the guidance of Docent Sten Kaijser and I have much more to thank him for than purely the scientific guidance. I could not express here, in a clear way, my gratitude for his patient work "to put me in the right way" and for having suggested the topics in this thesis.

My thanks to Inez Hjelm for her typing the manuscript into a beautiful work and to Ragnvald Magnusson for having printed it in a record time.

a ti "que és tão linda que só espalhas sofrimento e tão cheia de pudor que vives nua". (Vinicius de Morais)

§ 1. An inequality of Littlewood and Hardy

In the paper [8], Littlewood considered double arrays of real (or complex) numbers taken as a bilinear form on the space of the bounded sequences and he proved a necessary condition for the continuity of the bilinear form. The result was:

(1.1) Let (a_{ij}) be a real or complex matrix and consider

$$A(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

where $x = (x_i)_i$ and $y = (y_j)_j$ belong to ℓ^∞. If A is bounded by M as a bilinear form, then

$$(1.1.1) \qquad \sum_i \Big(\sum_j |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \leq KM$$

$$(1.1.2) \qquad \sum_j \Big(\sum_i |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \leq KM$$

$$(1.1.3) \qquad \sum_i \sum_j |a_{ij}|^{4/3} \leq (KM)^{4/3} .$$

This result was extended later in a joint paper by Littlewood and Hardy [5] as follows:

(1.2) Let (a_{ij}) be a real or complex matrix and consider

$$A(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

where $x = (x_i)_i \in \ell^p$ and $y = (y_j)_j \in \ell^q$; $1/p + 1/q < 1$. If A is bounded by M as a bilinear form, then

$$(1.2.1) \qquad \sum_i \Big(\sum_j |a_{ij}|^2 \Big)^{\lambda/2} \leq (KM)^\lambda$$

$$(1.2.2) \qquad \sum_j \Big(\sum_i |a_{ij}|^2 \Big)^{\lambda/2} \leq (KM)^\lambda$$

$$(1.2.3) \qquad \sum_i \sum_j |a_{ij}|^\mu \leq (KM)^\mu$$

where

$$(1.2.4) \qquad \lambda = \frac{pq}{pq - p - q}, \quad \Big(\frac{1}{\lambda} = 1 - \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\Big)\Big)$$

and

$$(1.2.5) \qquad \mu = \frac{4}{2 - 2(1/p + 1/q)} , \quad (\frac{1}{\mu} = 1/2(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q})) .$$

The constant K is not displayed in any of the papers, but in [7] S. Kaijser explicitates the way it may be calculated, it comes from Khintchine's inequality and the best value is $\sqrt{2}$, (in [8] Littlewood implicitly obtains $K = \sqrt{3}$).

The first difficulty in a generalization of the results of Littlewood and Hardy lies in the notation. The numbers λ and μ in (1.2) are an obvious indication of this. In [A] we use a multi-index notation which seems useful when considering multilinear forms in general and on ℓ^p-spaces in particular and it is clear that the inspiration comes from the notation used for partial derivatives.

First we wrote summations with multi-index $\beta \in \mathbb{N}^n$ where n is the order of linearity of the forms. But during the whole work we are often dealing with "partial summations" in which one index is dropped and we have therefore defined the multi-index $\dot{\beta}_i \in \mathbb{N}^{n-1}$ where the i^{th} index is constant.

In this work it becomes appearent once more that the usual notation of ℓ^p-spaces is not the best one. Instead of ℓ^p with $p \geq 1$ we should write ℓ^s with $s \leq 1$ to represent these Banach spaces and then many relations would be written in a quite "natural" way. To respect the notation which we do not aim to change at all, we have defined the multi-index

$$(1.3) \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n$$

with

$$(1.3.1) \qquad |\alpha| = \sum_i \alpha_i \text{ as the order of } \alpha ,$$

and now, given α we are given a collection of sequence spaces

$$(1.3.2) \qquad \{\ell^{p_1}, \ldots, \ell^{p_n} ; \ \alpha_i = 1/p_i ; \ 1 \leq i \leq n\} ,$$

and denote the cartesian product of the spaces in (1.3.1) by

$$(\alpha) = \ell^{p_1} \times \ldots \times \ell^{p_n}. \tag{1.3.3}$$

Then, as we are going to work with multilinear forms defined on such a cartesian product it was convenient to define a compact notation to represent them too:

$$(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{K} \tag{1.3.4}$$

represents a multilinear form $A = (a_\beta)$ defined on the cartesian product (α) by

$$Ax = A(x_\beta)_\beta = A(x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_n}) = \sum_\beta a_\beta x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_n} \tag{1.3.5}$$

with $(x_{\beta_i})_{\beta_i} \in \ell^{p_i}$.

With this notation we can present the main result of [A]:

(1.4) Theorem: Let $(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ be a multilinear form, bounded by M, $A(x) = \sum_\beta a_\beta x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_n}$; $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Then, for all $j = 1,\ldots,n$

$$\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 \Big)^{\lambda/2} \leq (KM)^\lambda \tag{1.4.1}$$

with $\lambda = \dfrac{1}{1-|\alpha|}$,

$$\sum_\beta |a_\beta|^\mu \leq (KM)^\mu, \quad \mu = \frac{n+1}{2n-2|\alpha|}. \tag{1.4.2}$$

For the proof of this result, see [A].

§ 2. The exponent λ in the inequality of Littlewood and Hardy is the best one

In their papers, Littlewood, [8], and Littlewood and Hardy, [5], proved that the exponents appearing in their inequality are the best possible and they did this by constructing examples. Several of their examples are based on orthogonal matrices in $\mathbb{R}^N$, ($N \in \mathbb{N}$ is the rank of the matrices), and since there is no natural analogy of such matrices when considering n-linear forms ($n \geq 3$) the problem of constructing examples to show that the exponents are the best possible is more difficult, but S. Kaijser drew our attention to some results of Chevet [2], and these results fitted well into the task of proving that the exponent was the best possible even in this case.

In [2], Chevet defined the gaussian mean of vectors belonging to a Banach space. We have enlarged her definition by using an arbitrary family of independent equidistributed random variables $X = (X_i)_i$ to have:

$$(2.1) \qquad \|(x_i)_i\|_{X,r,E} = \sup_n \left(\mathbb{E}\left\| \sum_{i \leq n} x_i X_i \right\|_E^r\right)^{1/r}$$

where $(x_i)_i \subset E$, E is a Banach space, the capital letter as an index indicates the choice of the family of random variables. Here $X \in \{R = \text{Rademachers}, G = \text{gaussian}\}$.

With help of the random mean (2.1) Chevet has estimated the norm of 2-tensors which we have generalized to n tensors to have

(2.2) Proposition (Chevet): *Let* $E_1, \ldots, E_n$ *be Banach spaces;* $x_{\beta_i} \in E_i$, *then*

$$(2.2.1) \qquad \frac{A_{G,r}}{n} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes x_{\beta_n})\|_{G,r,(E)_\varepsilon} \leq \sqrt{n}\, A_{G,r},$$

where

$$(2.2.2) \qquad A_{G,r} = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad \text{and} \quad S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,r,E_k}$$

and the capital letter G as an index represent the choice of a family of gaussian variables $(g_\beta) = (g_{\beta_1},\ldots,g_{\beta_n})$; $g_{\beta_i} \in N(0,1)$ and $(E)_\varepsilon$ stands for the injective tensor product of the family of spaces $E = \{E_1,\ldots,E_n\}$.

For the purpose of this work it was easier to consider the family of the Rademcher´s functions, where Chevet uses a family of Gaussian variables because this gives us the possibility of taking matrices whose entries were ± 1 at a random choice. This way we have been pushed to the following estimate

(2.3) Proposition: Let $E_1,\ldots,E_n$ be Banach spaces and $x_{\beta_i} \in E_i$, then

$$\frac{A_{R,r}}{n\sqrt{2}} \leq \|(x_{\beta_1}\otimes\ldots\otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_\varepsilon} \leq (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}\,A_{G,r}, \tag{2.3.1}$$

where $A_{G,r}$ is the same as in (2.2) and the capital letters G or R as index indicates the choice of family of random variables, G for gaussian and R for the Rademachers. As in (2.2), $(E)_\varepsilon$ stands by the injective tensor product of $E = \{E_1,\ldots,E_n\}$.

Proposition (2.3) gives us the possibility of considering matrices $A = (a_\beta)_\beta$, where $a_\beta = \pm 1$ and $\beta \in \{1,2,\ldots,N\}$ and with help of the inequality of Chebychev we are able to find a set F of probability $\neq 0$ of matrices $A(s)$; $s \in F$ (s is a choice of sign $\pm$) for which the equality is reached in the theorem of Littlewood and Hardy for $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$.

We first do this with the extremal cases represented by the vertices of a simplex of dimension n to obtain in both sides of the inequality of Littlewood and Hardy numbers having the same order of magnitude in terms of N (the size of the matrix A, $N \in \mathbb{N}$).

Later, using interpolation theory, we are able to express the same result for an arbitrary multi-index α to get:

(2.4) Theorem: The exponent $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$ is the best possible in the inequality of Littlewood and Hardy, where $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$.

References

[A] Praciano-Pereira, T., On bounded Multilinear forms on a class of ℓ^p spaces. U.U.D.M. Report no. 1979:4.

[B] Praciano-Pereira, T., Le meilleur exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy. U.U.D.M. Report no. 1980:4.

[1] Berg, J. and Löfström, J., Interpolation spaces, an introduction. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag.

[2] Chevet, S., Séries de Variables Aléatoires Gaussiennes à Valeur dans $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ et application aux produits d'espaces de Wiener abstraits. Exposé no. XIX, Séminaire sur la Géométrie des espaces de Banach (77-78) de l'École Polytechnique-Palaiseau, France.

[3] Chung, K.L., A course in Probability. Academic Press (Series of monographs and textbooks in Probability and Mathematical Statistics) 1974.

[4] Davie, A.M., Quotient algebras of uniform algebras. J. London Math. Soc. 7 (1) 73.

[5] Hardy, G. and Littlewood, J.E., Bilinear forms bounded in space [p,q]. Quarterly J. of Math. 5 (1934).

[6] Hardy, G., Littlewood, J.E., Pólya, Inequalities. Cambridge Univ. Press.

[7] Kaijser, S., Some results in the metric theory of tensor products. Studia Mathematica, T. LXIII (1978).

[8] Littlewood, J.E., On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Quarterly J. of Math. 1 (1930).

[9] Fernique, X., École d'Été de Probabilités de Saint Flour IV - 1974. Lecture Notes in Mathematics, no. 480.

[10] Zygmund, Trigonometric Series, Vol. II. Cambridge University Press (1968).

ON BOUNDED MULTILINEAR FORMS ON A CLASS OF ℓ^p SPACES

By

T. Praciano-Pereira

U.U.D.M. Report No. 1979:4

Contents

1. Introduction, notation and results 1

2. Proof of Theorem A 4

3. Proof of Theorem B 8

References 10

Uppsala University, Department of Mathematics

Report No. 4, June 1979

ABSTRACT

ON BOUNDED MULTILINEAR FORMS ON A CLASS OF ℓ^p SPACES

T. Praciano-Pereira (*)

Uppsala University, Department of Mathematics

In this paper we generalize an old result of Littlewood and Hardy about bilinear forms defined in a class of sequence spaces. Historically, Littlewood [5] first proved a result on bilinear forms on bounded sequences and this result was then generalized by Hardy and Littlewood in a joint paper [2] to bilinear forms on a class of ℓ^p spaces. Later Davie and Kaijser proved Littlewood's result for multilinear forms. In this paper, Theorems A and B generalize the results to multilinear forms on ℓ^p spaces. All the results are stated at the end of § 1. Theorems A and B are proved respectively in § 2 and § 3.

(*) permanent address:

Dep. of Mathematics - UFSC
caixa postal 476
Trindade
88 000 Florian. SC
Brazil

1. Introduction, notation and results.

In a paper written in 1930, [5] , Littlewood proved a necessary condition on the coeficients of a bilinear form on ℓ^∞ which may be stated as: If

$$A: \ell^\infty \times \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{C} \; ; \; A(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

is continuous and bounded by M then

$$(1.1.2) \qquad \sum_i \Big(\sum_j |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \leq KM \quad \text{(i and j may be interchanged).}$$

$$(1.1.2) \qquad \sum_i \sum_j |a_{ij}|^\mu \leq (KM)^\mu \qquad \mu = 4/3 \; .$$

This result has been generalized by Littlewood and Hardy in a joint paper written in 1934 to get (1.11) below which in modern terminology can be stated as

$$(1.2) \qquad \ell^p(D_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q(D_2) \subset \ell^\mu(D_1 \times D_2)$$

where $\mu = \dfrac{4}{3 - 2(1/p + 1/q)}$, $|2|$, D_i are discrete.

Davie and Kaijser generalized (1.1) for n-linear forms, [1,4] proving theorem (1.12) below which can be stated also as

$$(1.3) \qquad \hat{\bigotimes}_{\varepsilon\, i=1}^{n} \ell^1(D_i) \subset \ell^r(D)$$

where $r = \dfrac{2n}{n+1}$ and $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, D_i is discrete.

The method and the notation we have been able to develope in this paper shows that (1.2) comes directly from (1.1) and then using (1.3) we are able to generalize (1.2) to n-tensors.

The paper of Hardy and Littlewood [2] is quite hard to read and we believe that this presentation is simpler, even though the idea of the proof is the same.

One of the central difficulties was the notation, the number μ which appears in connection with (1.2) indicates the need of a new notation.

For a collection of sequence spaces $\ell^{p_1}, \ldots, \ell^{p_n}$ let us define the index

$$(1.4) \qquad \alpha_i = 1/p_i$$

and the multi-index

(1.5) $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in [0,1]^n$.

Very often we are using multi-indices $\beta \in \mathbb{N}^n$ to perform summations and then we shall denote

(1.6) $\dot{\beta}_i \in \mathbb{N}^{n-1}$

the multi-index obtained by letting the coordinate β_i drop away.

If $\alpha \in [0,1]^n$ we are going to use the notations:

(1.7) α_i to represent its i^{th} coordinate

(1.7.1) α_i' to represent the i^{th} coordinate of the dual multi-index α' that is $\alpha_i' = 1 - \alpha_i$.

(1.7.2) $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ = order of the multi-index α .

(1.7.3) $(\alpha) = \ell^{p_1} \times \ldots \times \ell^{p_n}$ the cartesian product of the family of sequences spaces corresponding to α.

(1.8) $x \in (\alpha)$, $x = (x_\beta)_\beta = (x_{\beta_1},\ldots, x_{\beta_n})_\beta$.

Throughout this paper we are dealing with functions defined on (α) for some $\alpha \in [0,1]^n$ which are n-linear, continuous and $\mathbb{C}$-valued. The notation will be

(1.9) $A: (\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$

$A: x = (x_\beta)_\beta \rightsquigarrow \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} a_\beta x_\beta$

where $(a_\beta)_\beta$ denotes the matrix of A .

A basic tool in our calculations will be partial sums on the entries of A which we shall denote

(1.10) $S_{\beta_i} = \left(\sum_{\dot{\beta}_i} |a_\beta|^2\right)^{1/2}$.

As an illustration of the use of this notation we present the

theorem of Hardy and Littlewood which will be the object of generalization in this paper followed by the result of Davie-Kaijser:

(1.11) Theorem (Littlewood and Hardy). Let $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \in [0,1]^2; |\alpha| \leq 1$, $A: (\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$ a bilinear form bounded by M; $A(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^2} a_\beta x_\beta$. Then,

(a) $\sum_\beta S_\beta^\lambda \leq (KM)^\lambda$; $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$, $i = 1,2$.

(b) If $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ then $(\sum_\beta |a_\beta|^\mu)^{1/\mu} \leq KM$; $\mu = \frac{4}{3-2|\alpha|}$.

(c) If $1 \geq |\alpha| \geq \frac{1}{2}$ and $(\forall i)(\alpha_i \leq \frac{1}{2})$ then $(\Sigma|a_\beta|^\lambda)^{1/\lambda} \leq KM$, λ as above.

(1.12) Theorem (Davie and Kaijser). If $\alpha = (0,\ldots,0) \in [0,1]^n$ and $A: (\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$; $A(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} a_\beta x_\beta$ is bounded by M, then

(a) $\sum_{\beta_i} S_{\beta_i} \leq KM$, $i = 1,2,\ldots,n$

(b) $(\sum_\beta |a_\beta|^r)^{1/r} \leq KM$, $r = \frac{2n}{n+1}$.

In this paper we shall prove the following two theorems:

(1.13) Theorem A. If $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in [0,1]^n$; $|\alpha| \leq 1/2$ and A is a multilinear form bounded by M, $A: (\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$; $A(x) = \sum_\beta a_\beta x_\beta$, then we have

$$\sum_{\beta_i} S_{\beta_i}^\lambda \leq (KM)^\lambda \quad \text{where} \quad \lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}.$$

(1.14) Theorem B. If A, α and λ are as in Theorem A, then

$$(\sum_\beta |a_\beta|^\mu)^{1/\mu} \leq KM ; \quad \mu = \frac{2n}{n+1-2|\alpha|}.$$

The constant K is the same from (1.12) through (1.15), in [4] $K \leq 2^{(n-1)/2}$, this is the form of K in (1.11) too.It is a consequence of Khintchines inequality in the proof of Littlewood's result by Davie and Kaijser.

If $|\alpha| > 1/2$ let's denote by $\hat{\alpha}_i$ the multi-index obtained by replacing α_i by zero. Then, if $|\hat{\alpha}_i| \leq 1/2$, we have

$$(1.15) \qquad \sum_{\beta_i} S^{\lambda}_{\beta_i} \leq (KM)^{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|}$$

and this shows that the theorem of Hardy and littlewood follows immediately from our theorems.

2. Proof of Theorem A.

The proof is by induction.

(2.1) Induction Hypothesis: We suppose that the theorem is true for

$$\alpha' = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}, 0,\ldots,0) .$$

(2.2) Lemma: (Hölder's converse). If $(x_i)_i \in \ell^r$ is of norm 1 and $(a_i)_i$ is such that $\sum_i x_i a_i \leq C$ where C is a constant, then

$$\sum_i a_i^{r'} \leq C^{r'} \quad \text{where} \quad 1/r' = 1 - 1/r .$$

Now, if we define $A'\colon (\alpha') \longrightarrow \mathbb{C}$; $A'(z) = A(zx_{\beta_k})$ for some $(x_{\beta_k})_{\beta_k}$ of norm 1 fixed, then we have

(2.3) Lemma: $\sum_{\beta_k} (\sum_{\beta_k} |a_\beta|^2 |x_{\beta_k}|^2)^{\lambda'/2} \leq (KM)^{\lambda'}$ with $\lambda' = \dfrac{1}{1-|\alpha'|}$.

Proof: By the induction hypothesis.

Now the k^{th} inequality follows from (2.3) and (2.2) with $1/r = \alpha_k \lambda'$ (and hence $r' = \lambda/\lambda'$):

(2.4.k) $$\sum_{\beta_k} S^{\lambda} \leq (KM)^{\lambda} .$$

To prove the other relations, for $i \neq k$, we need the lemma:

(2.5) Lemma: $$\sum_{\beta_k} \Big(\sum_{\beta_k} \frac{|a_\beta|^2}{S_{\beta_i}^{2-\lambda'}} \Big)^{\lambda/\lambda'} \leq (KM)^{\lambda}$$

with $i \neq k$ and λ' and λ as above.

Proof: This follows directly from the following lemma combined with Lemma (2.2) with $1/r = \alpha_k \lambda'$.

(2.6) Lemma: $$\sum_{\beta_k} \sum_{\beta_k} \frac{|a_\beta|^2}{S_{\beta_i}^{2-\lambda'}} \left| x_{\beta_k} \right|^{\lambda'} \leq (KM)^{\lambda'} ,$$

where λ' is as above and $(x_{\beta_k})_{\beta_k}$ is of norm 1 .

Proof:

$$\sum_{\beta_k} \sum_{\dot\beta_k} \frac{|a|_\beta^2}{s_{\beta_i}^{2-\lambda'}} |x_{\beta_k}|^{\lambda'} = \sum_{\beta_i} \sum_{\dot\beta_i} \frac{|a_\beta|^2}{s_{\beta_i}^{2-\lambda'}} |x_{\beta_k}|^{\lambda'} =$$

$$= \sum_{\beta_i} \sum_{\dot\beta_i} \frac{|a_\beta|^{2-\lambda'}}{s_{\beta_i}^{2-\lambda'}} |a_\beta|^{\lambda'} |x_{\beta_k}|^{\lambda'} \leq$$

$$\leq \sum_{\beta_i} \left(\sum_{\dot\beta_i} \frac{|a_\beta|^2}{s_{\beta_i}^2} \right)^{\frac{2-\lambda'}{2}} \left(\sum_{\dot\beta_i} |a_\beta|^2 |x_{\beta_k}|^2 \right)^{\frac{\lambda'}{2}} = A ,$$

by Hölder's inequality with

$$\frac{2-\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{2} = 1 , \quad 0 < \frac{\lambda'}{2} < 1 .$$

And as $\sum_{\dot\beta_i} \frac{|a_\beta|^2}{s_{\beta_i}^2} = 1$ we have

$$A = \sum_{\beta_i} \left(\sum_{\dot\beta_i} |a_\beta|^2 |x_{\beta_k}|^2 \right)^{\lambda'/2} \leq (KM)^{\lambda'}$$

by the induction hypothesis, proving (2.6).

Now, for $i \neq k$ we have

$$\sum_{\beta_i} s_{\beta_i}^{\lambda} = \sum_{\beta_i} s_{\beta_i}^{\lambda-2} \sum_{\dot\beta_i} |a_\beta|^2 = \sum_{\beta_k} \sum_{\dot\beta_k} \frac{|a_\beta|^2}{s_{\beta_i}^{2-\lambda}} =$$

$$= \sum_{\beta_k} \sum_{\dot\beta_k} \frac{|a_\beta|^{2r}}{s_{\beta_i}^{2-\lambda}} |a_\beta|^{2r'} = B .$$

Put now

$$(2.7) \qquad \begin{cases} r = \frac{2-\lambda}{2-\lambda'} < 1 \\ r' = 1 - r = \frac{\lambda - \lambda'}{2-\lambda'} < 1 \end{cases}$$

and then by Hölder's inequality

$$B \leq \sum_{\beta_k} \left(\sum_{\dot{\beta}_k} \frac{|a_\beta|^2}{S_{\beta_i}^{2-\lambda'}} \right)^r \left(\sum_{\dot{\beta}_k} |a_\beta|^2 \right)^{r'} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\beta_k} \left(\sum_{\dot{\beta}_k} \frac{|a_\beta|^2}{S_{\beta_i}^{2-\lambda'}} \right)^{r/s} \right)^s \left(\sum_{\beta_k} \left(\sum_{\dot{\beta}_k} |a_\beta|^2 \right)^{r'/s'} \right)^{s'} = C$$

by Hölder's inequality with $s + s' = 1$.

Then, by choosing s so that $r/s = \lambda/\lambda'$ it turns out that $r'/s' = \lambda/2$ and we have

$$C \leq (KM)^{s\lambda} (KM)^{s'\lambda} = (KM)^{\lambda} .$$

(2.8) Proposition: If $\frac{1}{2} \leq |\alpha| < 1$ but $|\dot{\alpha}_i| \leq \frac{1}{2}$ then

$$\sum_{\beta_i} S_{\beta_i}^{\lambda} \leq (KM)^{\lambda} \; ; \quad \lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|} .$$

Proof: From Lemmas (2.3) and (2.2).

3. Proof of Theorem B.

The proof is essentially the same as in the bilinear case. It is performed by using Hölder's inequality to split $\sum_{\beta}|a_{\beta}|^{\mu}$ into several factors (in n factor in case of n-linear forms). Later using Minkowski inequality we are able to use inequalities in Theorem A to make the final majoration. We shall do the proof for n=3, the general case being obvious.

$$\text{(3.1)}\qquad \sum_{\beta}|a_{\beta}|^{\mu} = \sum_{\beta}|a_{\beta}|^{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \leq \leq \prod_{i=1}^{3}\Big(\sum_{\beta_1}\Big(\sum_{\beta_2}\Big(\sum_{\beta_3}|a_{\beta}|^{\mu_i/s_i^3\, s_i^3/s_i^2\, s_i^2/s_i^1\, s_i^1}\Big)^{s_i^3}\Big)^{s_i^2}\Big)^{s_i^1} = \prod_{i=1}^{3}A_i$$

by applying Hölder's inequality with the multi-indices

$$\text{(3.2)}\qquad s^i = (s_1^i,\ s_2^i,\ s_3^i);\ s_1^i + s_2^i + s_3^i = 1$$

$i = 1,2,3$.

Now, by successive application of Minkowski inequality in the second and third factors (once and twice, respectively) we shall be able to majorize them via Theorem A each one beginning with the right index. The whole is subordinated to the system of equations

$$\text{(1)}\quad \frac{\mu_1}{s_1^3} = \frac{\mu_2}{s_2^3} = \frac{\mu_3}{s_3^2} = 2$$

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} s_1^3 = s_1^2\ ; & 2s_1^2 = \lambda s_1^1 \\ s_2^3 = s_2^1\ ; & 2s_2^1 = \lambda s_2^2 \\ s_3^2 = s_3^1\ ; & 2s_3^1 = \lambda s_3^3 \end{cases}$$

$$\text{(3)}\quad (\forall i)\ \Big(\sum_{k=1}^{3} s_k^i = 1\Big)\ .$$

From (2) and (3) we may conclude that a given multi-index has all coordinates equal to a but one which is $\frac{2}{\lambda}a$:

$$s^1 = (a, a, \tfrac{2}{\lambda}a);\ a = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}$$
$$s^2 = (a, \tfrac{2}{\lambda}a, a)$$
$$s^3 = (\tfrac{2}{\lambda}a, a, a)$$

and $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2a = \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

In this way we have (see [3], page 32),

$$A_1 = \Big(\sum_{\beta_1}\Big(\sum_{\beta_2}\sum_{\beta_3}|a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2}\Big)^{1/\lambda+1} \le (KM)^{\lambda/\lambda+1}$$

$$A_2 = \Big(\sum_{\beta_1}\Big(\sum_{\beta_2}\Big(\sum_{\beta_3}|a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2}\Big)^{2/\lambda}\Big)^{\lambda/2(\lambda+1)} \le$$

$$\le \Big(\sum_{\beta_2}\Big(\sum_{\beta_1}\sum_{\beta_3}|a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2}\Big)^{1/\lambda+1} \le (KM)^{\lambda/\lambda+1}$$

$$A_3 = \Big(\sum_{\beta_1}\sum_{\beta_2}\Big(\sum_{\beta_3}|a_\beta|^{\lambda}\Big)^{2/\lambda}\Big)^{\lambda/2(\lambda+1)} \le$$

$$\le \Big(\sum_{\beta_1}\Big(\sum_{\beta_3}\Big(\sum_{\beta_2}|a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2}\Big)^{2/\lambda}\Big)^{\lambda/2(\lambda+1)} \le$$

$$\le \Big(\sum_{\beta_3}\Big(\sum_{\beta_1}\sum_{\beta_2}|a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2}\Big)^{1/\lambda+1} \le (KM)^{\lambda/\lambda+1}$$

$$\prod_{i=1}^{3} A_i \le (KM)^{3\lambda/\lambda+1} = (KM)^{\mu} .$$

By substitution of λ we have $\mu = \frac{3}{2-|\alpha|}$ or, in general, in the case of n-linear forms

$$\mu = \frac{2n}{n+1-2|\alpha|} .$$

References

[1] Davie,A.M., Quotient algebras of uniform algebras. J. London Math. Soc. 7 (1) 1973.

[2] Hardy,G. and Littlewood,J.E. , Bilinear forms bounded in space $[p,q]$. Quartely J. of Mathematics 5 (1934).

[3] Hardy ,Littlewood and Pólya, Inequalities. Cambridge University Press.

[4] Kaijser,S. ,Some results in the metric theory of tensor products Studia Math. T.LXIII (1978)

[5] Littlewood,J.E. ,On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Quarterly J. of Mathematics 1 (1930).

LE MEILLEUR EXPOSANT DANS UNE INÉGALITÉ DE LITTLEWOOD ET HARDY

By

T. Praciano-Pereira

U.U.D.M. Report 1980:4

Uppsala University, Department of Mathematics

Report No. 4, April 1980

Le meilleur exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy

T. Praciano-Pereira

Département de Mathématiques
Uppsala

Sommaire: Nous faisons usage d'une estimation en moyenne de la norme des produits tensoriels pour prouver que l'exposant dans une inégalité de Littlewood et Hardy est le meilleur possible.

§ 1. Introduction: notations et résultats
§ 2. Estimation en moyenne par rapport à une famille de variables aléatoires des produits tensoriels
§ 3. Étude des cas extrémaux
§ 4. Une application de la théorie de l'interpolation
§ 5. Bibliographie

§ 1. Introduction: notations et résultats

Nous présentons dans ce paragraphe la notation employée dans cet article dans l'ordre dans la quelle elle apparaîtra dans la suite aux §§ 2, 3, 4. La seconde moitiée du paragraphe consistera d'une liste des lemmes et propositions qui nous ont permis la demonstration du resultat principal ainsi que ce lui-ci.

Considérons le multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$; $0 \leq \alpha_i = 1/p_i \leq 1$.

Donné un tel multi-indice nous considérons aussi donné une collection d'espaces de suites $\ell^{p_i},\ldots,\ell^{p_n}$ et nous désignerons par:

(1.1.1) $\quad (\alpha) = \ell^{p_1} \times \ldots \times \ell^{p_n}$, leur produit cartesien,

(1.1.2) $\quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ = 1'ordre du multi-indice α,

(1.2) $\quad (x_\beta)_\beta = (x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_n}) \in (\alpha)$ où $\beta \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice.

Donnée une famille d'espaces $E = (E_i)_i^{(*)}$, nous désignerons leur produit tensoriel injectif par

(1.3) $\quad (E)_\varepsilon$

et nous aurons en particulier

(1.4) $\quad (\alpha)_\varepsilon = \ell^{p_1} \hat{\otimes}_\varepsilon \ldots \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^{p_n}$.

Dans [8] nous avons démontré que si

$$(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

est une forme multilinéaire continue, bornée par M, alors pour tout $i = 1,\ldots,n$

(1.5) $$\sum_{\beta_i} \Big(\sum_{\dot{\beta}_i} |a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2} = S^\lambda \leq (KM)^\lambda \qquad (L-H)$$

où $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ et $\lambda = \dfrac{1}{1-|\alpha|}$, $\dot{\beta}_i$ étant le multi-indice obtenu de $\beta \in \mathbb{N}^n$ par substitution de l'indice β_i par une constante.

Ceci est une généralisation d'un résultat de Littlewood, [7] quand

---

(*) Nous allons aussi écrire "$\in$ Ban" à la place de "c'est un espace de Banach"

$\alpha = (0,0)$ répris par lui même et Hardy dans [4] et par Kaijser et Davie, voir [6] et [9], quand $\alpha = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$.

Dans la suite nous aurons plusieurs fois l'occasion de faire référence à l'inégalité de Littlewood et Hardy (1.5) et nous le ferons tout court par (L - H).

Dans [2] Chevet a défini la moyenne gaussienne de la norme d'un produit tensoriel grace à la quelle il nous a été possible de prouver que l'exposant λ chez (L - H) était le meilleur possible par construction probabiliste d'une famille d'exemples. Nous pouvons, en effet, à l'aide de l'inégalité de Chebychev [3, page 48] assurer l'existence d'un ensemble de probabilité différent de zéro d'applications multilinéaires pour lesquelles l'égalité se vérifie.

Si nous associons à la famille $(x_i)_i \subset E$; $E \in$ Ban une famille de variables aléatoires $X = (X_i)_i$ indépendentes et equidistribuées définies dans un espace de probabilitées (W,F,P), nous pourrons alors calculer la moyenne des vecteurs x_i par rapport à cette famille de variables aléatoires. Chevet, [2], considère des variables gaussiennes $(g_i)_i$; $g_i \in N(0,1)$, et nous définissons avec elle:

$$(1.6) \qquad \|(x_i)_i\|_{X,r,E} = \sup_N \left(\mathbb{E}\left\| \sum_{i \leq N} x_i X_i \right\|_E^r\right)^{1/r}$$

où le grand indice X représente la famille de variables aléatoires choisie. Dans cet article les familles seront $G = (g_i)_i$ de variables gaussiennes, ou $R = (r_i)_i$ les fonctions de Rademacher.

Dans le § 2 nous allons démontrer l'estimation suivante, déjà démontrée par Chevet dans le cas des 2-tenseurs. Nous le ferons dans le cas des n-tenseurs:

(1.7) Proposition: (Chevet). Soient $E_1,\ldots,E_n \in$ Ban et $x_{\beta_i} \in E_i$. Alors

$$(1.7.1) \qquad \frac{A_{G,r}}{n} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes x_{\beta_n})\|_{G,r,(E)_\varepsilon} \leq \sqrt{n}\, A_{G,r}$$

où

(1.7.2) $$A_{G,r} = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad \text{et} \quad S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,r,E_k}$$

et

(1.7.3) $$M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] = \sup_{\substack{y \in E_j' \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{\beta_j} |\langle y, x_{\beta_j}\rangle|^2\right)^{1/2},$$

et $G = (g_{\beta_k})_{\beta_k}$ gaussiennes; $g_{\beta_k} \in N(0,1)$ pour tout β_k.

(1.8) Proposition: Si $R = (r_i)_i$ sont les fonctions de Rademacher et $G = (g_i)_i$ des gaussiennes indépendentes, $g_i \in N(0,1)$, alors

(1.8.1) $$\frac{A_{R,r}}{\sqrt{2}\, n} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_\varepsilon} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{n}\, A_{G,r}.$$

La proposition (1.8) va nous permettre de considérer rien que des matrices $A = (a_\beta) = (\pm 1)$.

A l'aide de (1.8) et de l'inégalité de Chebychev nous pourrons garantir l'existence d'un ensemble de probabilité non nulle de formes multilinéaires pour lesquelles l'égalité peut être atteinte dans (L - H) pour $\lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|}$.

Dans § 3 nous étudierons les cas extrémaux formés par les vertices du simplex de dimension n formé par les multi-indices α; $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Le résultat obténu est alors que la somme à gauche dans (L - H) et l'estimation à droite de la norme M faite à l'aide de (1.8) ont le même ordre de grandeur.

Dans le § 4 nous pourrons alors appliquer la théorie d'interpolation d'espaces de Banach, la méthode complexe, pour étendre le résultat à un point arbitraire α du simplex $|\alpha'| \leq \frac{1}{2}$ ce qui prouve le

(1.9) Théorème: L'exposant $\lambda = \frac{1}{1 - |\alpha|}$ dans l'inégalité de Littlewood et Hardy est le meilleur possible pour $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$.

C'est un plaisir de remercier A. Gut et P. Sjögren pour les plusieurs occasions de conversation que nous avons eu au sujet de cet article. C'est aussi un plaisir de remercier S. Kaijser pour m'avoir attiré l'attention sur l'article de Chevet et pour m'avoir encouragé plusieurs fois dans tout le développement de ce travail.

Maria Teresa Sala Sjögren a pris la peine de faire la revision du texte français, nous en sommes obligés.

Inez Hjelm est la responsable pour la composition dactylographique de cet travail et Ragnvald Magnusson de l'impression, à tous les deux nos remerciements.

§ 2. Estimation en moyenne par rapport à une famille de variables aléatoires de produits tensoriels

La proposition suivante a été démontrée par Chevet, [2], dans le cas des 2-tenseurs:

(2.1) Proposition: (Chevet) Soient $E_1,\dots,E_n \in \mathrm{Ban}$ et $x_{\beta_i} \in E_i$. Alors

$$\frac{A_{G,r}}{n} \leq \|x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n}\|_{G,r,(E)_\varepsilon} \leq \sqrt{n}\, A_{G,r} \tag{2.1.1}$$

où

$$A_{G,r} = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad \text{et} \quad S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,r,E_k}. \tag{2.1.2}$$

Démonstration. Il suffit de considérer des sommes finies.

Pour démontrer l'inégalité à droite nous avons besoin d'un théorème de Sudakov-Fernique énoncé dans [2], dont nous présentons ici une version simplifiée:

(2.1.3) Lemme: (Sudakov-Fernique) Soit $T \xrightarrow{X} L^0(W,F,P)$ et $T \xrightarrow{Y} L^0(W,F,P)$ deux variables aléatoires réelles, gaussiennes, centrées, qui sont des restrictions à une partie symétrique T d'un espace vectoriel de variables aléatoires linéaires. Si la condition suivante est verifiée

$$\mathbb{E}(|Y(t)-Y(s)|^2) \leq \mathbb{E}(|X(t)-X(s)|^2) \tag{2.1.3.1}$$

pour tout $(s,t) \in T \times T$, alors, pour tout $r \geq 1$ nous aurons

$$(\mathbb{E}(\sup_{s\in T} |Y(s)|^r))^{1/r} \leq (\mathbb{E}(\sup_{s\in T} |X(s)|^r))^{1/r}. \tag{2.1.3.2}$$

Démonstration. Voir [10].

Nous allons définir maintenant deux fonctions X,Y qui, nous allons le démontrer, remplissent la condition (2.1.3.1), l'hypothèse du théorème de Sudakov-Fernique.

(2.1.4) Définition: Soient $U_k^{\prime}$ les boules unité des espaces $E_k^{\prime}$. Pour tout $(x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_n}) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ donné, posons pour

$$(w,\ a_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes a_n^{\prime}) \in W \times U_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes U_n^{\prime}\ :$$

$$(2.1.4.1)\qquad Y(w)(a_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes a_n^{\prime}) = \sum_{\beta} \langle a_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes a_n^{\prime},\ x_{\beta_1}\otimes\ldots\otimes x_{\beta_n}\rangle\, g_{\beta}(w)\ ,$$

où $(g_{\beta})_{\beta}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes independentes de même loi $N(0,1)$. De même nous définirons pour

$$(w,\ a_1^{\prime},\ldots,a_n^{\prime}) \in W \times U_1^{\prime} \times \ldots \times U_n^{\prime}$$

$$(2.1.4.2)\qquad X(w)(a_1^{\prime},\ldots,a_n^{\prime}) = (X_1(w)(a_1^{\prime})\ ,\ldots,\ X_n(w)(a_n^{\prime})) \quad \text{avec}$$

$$X_j(w)(a_j^{\prime}) = \sqrt{n}\ \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \left(M_2[(x_{\beta_k})_{\beta_k}]\right) \sum_{\beta_j} \langle a_j^{\prime}, x_{\beta_j}\rangle g_{\beta_j}(w)\ .$$

(2.1.5) Lemme: (L'hypothèse dans le théorème de Sudakov-Fernique). Pour les fonctions X,Y définies dans (2.1.4) nous avons

$$\mathbb{E}(|Y(a_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes a_n^{\prime}) - Y(b_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes b_n^{\prime})|^2) \leq$$

$$\leq \mathbb{E}(\|X(a_1^{\prime},\ldots,a_n^{\prime}) - X(b_1^{\prime},\ldots,b_n^{\prime})\|^2_{\mathbb{R}^n})\ .$$

Démonstration.

$$\mathbb{E}(|Y(a_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes a_n^{\prime}) - Y(b_1^{\prime}\otimes\ldots\otimes b_n^{\prime})|^2) \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\Big(\sum_{\beta} |\langle a_1^{\prime},x_{\beta_1}\rangle\cdot\ldots\cdot\langle a_n^{\prime},x_{\beta_n}\rangle - \langle b_1^{\prime},x_{\beta_1}\rangle\cdot\ldots\cdot\langle b_n^{\prime},x_{\beta_n}\rangle|^2 |g_{\beta}|^2 =$$

$$(2.1.5.1)\qquad = \sum_{\beta} |\langle a_1^{\prime},x_{\beta_1}\rangle\cdot\ldots\cdot\langle a_n^{\prime},x_{\beta_n}\rangle - \langle b_1^{\prime},x_{\beta_1}\rangle\cdot\ldots\cdot\langle b_n^{\prime},x_{\beta_n}\rangle|^2 = S_1\ .$$

Nous écrirons, maintenant, pour un moment, pour simplifier:

$$A_{1i} = A_{1i}(\beta) = \langle a_i^{\prime},x_{\beta_i}\rangle \quad \text{et} \quad A_{2i} = A_{2i}(\beta) = \langle b_i^{\prime},x_{\beta_i}\rangle$$

et nous sommes menés à l'égalité:

$$\sum_{\beta} |A_{11}A_{12}\cdot\ldots\cdot A_{1n} - A_{21}A_{22}\cdot\ldots\cdot A_{2n}|^2 =$$

$$(2.1.5.2)\qquad = \sum_{\beta} |(A_{11}-A_{21})A_{12}\cdot\ldots\cdot A_{1n} \pm \ldots \pm (A_{1n}-A_{2n})A_{21}\cdot\ldots\cdot A_{2n-1}|^2$$

qu'il faut démontrer, ou plutôt écrire les termes intermédiaires:

$$(A_{11} - A_{21})A_{12}A_{13} \cdot\ldots\cdot A_{1n} +$$

$$A_{21}(A_{12} - A_{22})A_{13} \cdot\ldots\cdot A_{1n} +$$

. . . . . .

$$A_{21}A_{22} \cdot\ldots\cdot A_{2n-1}(A_{1n} - A_{2n})$$

dont la somme est le second membre dans (2.1.5.2). Nous pouvons donc majorer S_1, (2.1.5.1), en revenant à la notation normale, par:

$$n \sum_{\beta} \sum_{i} |\langle a_i' - b_i', x_{\beta_i} \rangle|^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |\langle d_{ik}', x_{\beta_k} \rangle|^2 = S_2$$

où $d_{ik}' = b_k'$ si $k < i$ et $d_{ik}' = a_k'$ autrement.

Par application de la définition de M_2 nous pouvons majorer S_2

$$S_2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_2[(x_{\beta_k})_{\beta_k}]^2 \right) |\langle a_i' - b_i', x_{\beta_i} \rangle|^2 =$$

$$= \mathbb{E}(\|X(a_1', \ldots, a_n') - X(b_1', \ldots, b_n')\|_{\mathbb{R}^n}^2) .$$

Cela prouve que l'hypothèse dans le théorème de Sudakov-Fernique (2.1.3.1) est vérifiée et nous pouvons donc conclure que l'inégalité (2.1.3.2) l'est aussi pour les variables X et Y définies dans (2.1.4). Mais à gauche dans (2.1.3.2) nous avons

$$\|(x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes x_{\beta_n})\|_{G,r,(E)_\varepsilon} ,$$

et à droite dans (2.1.3.2) nous avons (avec $a' = (a_i')_i$; $U' = U_1' \times \ldots \times U_n'$):

$$\mathbb{E}\left(\sup_{a' \in U'} \|X(a')\|_{\mathbb{R}^n}^r \right)^{1/r} =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sup_{a' \in U'} \|(X_1(a_1'), \ldots, X_n(a_n'))\|_{\mathbb{R}^n}^r \right)^{1/r} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\left\| \left(\sup_{a_1' \in U_1'} X_1(a_1'), \ldots, \sup_{a_n' \in U_n'} X_n(a_n') \right) \right\|_{\mathbb{R}^n}^r \right)^{1/r} = N_1$$

où on peut reconnaître la norme de ℓ_n^2 et celle de $L^r(W)$. Si $r > 2$

on peut changer l'ordre de ces normes à l'aide de l'inégalité de Minkowski, [5, page 32], pour écrire

$$N_1 \leq \|(\mathbb{E} \sup_{a_i' \in U_i'} |X_i(a_i')|^r)^{1/r})_{i=1}^n\|_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq \|(\mathbb{E} \sup_{a_i' \in U_i'} |X_i(a_i')|^r)^{1/r})_{i=1}^n\|_{\ell_1^n} \leq \sqrt{n}\, A_{G,r}\,.$$

Si $r \leq 2$ on peut majorer N_1 de la manière suivante: on applique l'inégalité de Jensen deux fois, avec $r/2 < 1$ et avec $1/r < 1$ pour obtenir finalement

$$N_1 \leq \sqrt{n}\, A_{G,r}\,.$$

L'inégalité à gauche: Nous aurons besoin du lemme suivant, voir [2]:

(2.1.6) Lemme: Pour toute suite de nombres réels $(t_i)_i$ et toute suite $(x_j)_j \subset E$, nous avons

$$\|(t_i x_j)_{i,j}\|_{G,r,E} = (\sum_i t_i^2)^{1/2} \|(x_i)_i\|_{G,r,E}$$

avec la condition $0 \cdot \infty = 0$.

Nous pouvons définir la forme multilinéaire:

$$(2.1.7) \qquad (E)_\varepsilon \xrightarrow{A_i} E_i \;;\; x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \rightsquigarrow x_i \cdot \prod_{k \neq i} \langle x_k, y_k' \rangle$$

où $(y_k')_{k \neq i}$ est une collection de vecteurs unité des espaces duaux E_i'. Les formes A_i ainsi définies sont de norme au plus égal à 1 quelque soit le choix des $(y_k')_{k \neq i}$. Maintenant on peut appliquer (2.1.6) avec

$$t_i = \prod_{k \neq i} |\langle x_k, y_k' \rangle|$$

et la définition de $M_2[(x_k)_k]$ pour avoir la majoration:

$$(2.1.8) \qquad \|(x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes x_{\beta_n})_\beta\|_{G,r,(E)_\varepsilon} \geq \prod_{k \neq j} M_2[(x_{\beta_k})_{\beta_k}] \cdot \|(x_{\beta_j})_{\beta_j}\|_{G,r,E_j}\,.$$

Le membre à droite dans (2.1.8) dépend seulement de j et l'inégalité est aussi vraie pour la moyenne arithmétique d'où (2.1.1).

(2.2) Lemme: Si G désigne une famille de variables gaussiennes $(g_i)_i$, $g_i \in N(0,1)$ et R désigne les fonctions de Rademacher, alors

(2.2.1) $$\|(x_i)_i\|_{R,r,E} \leq (\frac{2}{\pi})^{1/2} \|(x_i)_i\|_{G,r,E} .$$

Démonstration.

$$\|(x_i)_i\|_{G,r,E} = \sup_N \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \| \sum_{i \leq N} x_i t_i \|_E^r \, dG(t) \Big)^{1/t} = I$$

avec $dG(t) = (2\pi)^{-N/2} \exp(-\frac{\|t\|^2}{2}) \, dt_1 \dots dt_n .$

$$I = \sup_N (1/2^N \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \| \sum_{i \leq N} \varepsilon x_i t_i \|_E^r \, dG(t))^{1/r} \geq$$

$$\geq \sup_N (1/2^N \sum_{\varepsilon=\pm 1} \| \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \sum_{i \leq N} x_i t_i \, dG(t) \|_E^r)^{1/r} =$$

$$= (\frac{2}{\pi})^{-1/2} \|(x_i)_i\|_{R,r,E} .$$

(2.3) Proposition: Si $A_{X,r}$ est la somme définie en (2.1.2) dans la quelle le grand indice répresente le choix de la famille de variables aléatoires, (G, pour les gaussiennes ou R, pour les Rademachers), alors

$$\frac{1}{n\sqrt{2}} A_{R,r} \leq \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_\varepsilon} \leq (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} \, A_{G,r} .$$

Démonstration. A droite nous pourrons majorer $\|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_\varepsilon}$ à l'aide du lemme (2.2) par

$$\|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{R,r,(E)_\varepsilon} \leq (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \cdot \|(x_{\beta_1} \otimes \dots \otimes x_{\beta_n})\|_{G,r,(E)_\varepsilon}$$

et ensuite nous obtiendrons la majoration finale à l'aide de la proposition (2.1).

A gauche: Nous avons besoin du lemma suivant

(2.3.1) Lemme: $\|(t_i x_j)_{i,j}\|_{R,r,E} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sum_i t_i^2)^{1/2} \|(x_i)_i\|_{R,r,E}$,

où le grand indice R represente les fonctions de Rademacher et les définitions et notations sont celles du (1.6), et la famille $(t_i)_i$ est une famille de nombres réels.

Démonstration. Supposons $(t_i)_i$ indépendente sur $\mathbb{Q}$.

$$\|(t_i x_j)_{ij}\|_{R,r,E} = \sup_N (\mathbb{E}(\| \sum_{i,j\leq N} t_i x_j r_{ij} \|_E^r))^{1/r} =$$

$$= \sup_N (\mathbb{E}(\| \sum_{j\leq N} f_j x_j \|_E^r))^{1/r} = I_1$$

où les fonctions $f_j = \sum_i t_i r_{ij}$.

Nous définirons maintenant les fonctions $s_j = \mathrm{sgn}(f_j)$. Comme les t_i sont independentes sur $\mathbb{Q}$ les s_j sont en effet les fonctions de Rademacher. Soit aussi F_s la tribu engendrée par $s = (s_j)_j$. Si nous prenons maintenant l'espérance conditionnelle de I_1 par rapport à F_s nous aurons:

$$I_1 = \sup_N (\mathbb{E}(\mathbb{E}(\| \sum_{j\leq N} f_j x_j \|_E^r \mid F_s)))^{1/r} \geq$$

$$\geq \sup_N (\mathbb{E}(\| \sum_{j\leq N} \mathbb{E}(f_j \mid F_s) x_j \|_E^r))^{1/r} = I_2 .$$

Par l'inégalité de Khintchine nous aurons:

$$I_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sum_i t_i^2)^{1/2} \sup_N (\mathbb{E}(\| \sum_{j\leq N} x_j s_j \|_E^r)^{1/r}$$

avec les fonctions s_j définies ci-dessus. Pourtant les s_j sont en effet les Rademachers ce qui prouve le lemme, sous l'hypothèse initiale sur les t_i d'être indépendentes sur $\mathbb{Q}$. Si ce n'est pas le cas, on peut approcher la suite $(t_i)_i$ par des suites $(t_i^n)_i$ qui soient indépendentes sur $\mathbb{Q}$ et le lemme est ainsi démontré. La démonstration de l'inégalité à gauche finit maintenant comme dans (2.1), voit (2.1.7) et la suite.

§ 3. Étude des cas extrémaux

Dans ce paragraphe nous allons obtenir à l'aide de l'estimation (2.3) et de l'inégalité de Chebychev une estimation précise pour les normes d'une forme multilinéaire dans certains cas extrémaux qui sont les vertices d'un simplex de dimension n, c'est à dire les multi-indices $\alpha^o = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha^i \in \mathbb{R}^n$ où tous les indices sont nuls sauf celui d'ordre i qui est alors $\frac{1}{2}$.

Nous commençons par supposer qu'il existe des constantes L_i telles que, $\mathbb{E}(\|A(s)\|^2) = \mathbb{E}(M_i(s)^2) \leq L_i^2$ où $\underline{s}$ est un choix arbitraire des signes ± 1 dans la matrice $A = (a_\beta) = (\pm 1)$.

$$(3.1) \qquad (\alpha^i) \xrightarrow{A} \mathbb{C}.$$

Soit maintenant l'ensemble, (l'évenement):

$$(3.2.1) \qquad E_i = \{s;\ M_i(s)^2 > t \cdot L_i^2\}\ ;\ i = 0,\ldots,n,$$

où t est grand (nous le prendrons égal à $2n$).

L'inégalité de Chebychev, [3, page 48], nous donne maintenant

$$(3.2.2) \qquad P(E_i) < \frac{1}{t}$$

et si nous choisissons $t = 2n$ nous voyons que

$$(3.2.3) \qquad P(\bigcup_{i=0}^{n} E_i) < \frac{n+1}{2n} < 1 \qquad (n \geq 2).$$

Soit donc l'ensemble $F = W - \bigcup_{i=0}^{n} E_i$. Alors $P(F) \neq 0$.

Donc, par construction, l'ensemble F est celui des $\underline{s}$ tels que

$$(3.2.4) \qquad M_i(s) < \sqrt{2n}\, L_i\ ,\ \text{pour tout}\ i = 0,1,\ldots,n.$$

La proposition (2.3) nous donne l'estimation $L_i = (\frac{1}{\pi})^{1/2} A^i_{G,2}$ et nous definirons:

$$(3.2.5) \qquad K_i = (\frac{2}{\pi})^{1/2} \sqrt{n}\, A^i_{G,2},$$

où la dépendence du second membre de i réside dans $A^i_{G,2}$. Nous avons

ainsi démontré:

(3.2) Proposition: Il existe un ensemble F de probabilité différente de zéro tel que, pour chaque $s \in F$ $A(s)$ est un choix de signes dans la matrice $A = (a_\beta) = (\pm 1)$ et la norme $M_i(s)$ de $A(s)$ comme forme multilinéaire

$$(\alpha^i) \xrightarrow{A(s)} \mathbb{C} \; ; \quad i = 0,1,\ldots,n$$

est plus petite ou égale à

$$(3.2.6) \qquad \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, A^i_{G,2} .$$

Dans le reste de ce paragraphe et dans le suivant nous allons simplifier la notation à l'aide de la proposition (3.2). Nous écrirons simplement A pour la matrice $A(s)$, c'est-a-dire que nous avons fait d'une fois pour toutes le choix des signes s tels que la matrice $A(s) = A$ satisfait la proposition (3.2). Nous écrirons, de même, M_i au lieu de $M_i(s)$. Dans la démonstration de (3.2) nous avons aussi fait le choix $r = 2$, et alors $C_r = C_2 = 1$.

Nous allons maintenant expliciter les calculs des K_i à l'aide de la proposition (2.3).

(3.3) Lemme: Soit $i = 1,\ldots,n$ et α^i le multi-index d'ordre $\frac{1}{2}$ ayant tous les index nuls sauf celui d'ordre i qui est égal à $\frac{1}{2}$. La norme M_i de la matrice $A = (a_\beta)_\beta = (\pm 1)$ comme forme multilinéaire

$$(\alpha^i) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

est majorée par

$$(3.3.1) \qquad K_1 = (\tfrac{2}{\pi})^{1/2}\, n^{\frac{3}{2}}\, N^{\frac{n}{2}} .$$

Démonstration. Il est évident à partir de la démonstration que tous les cas i sont identiques, il suffit de faire la démonstration pour le cas $i = n$.

Selon la définition (1.7.2)

$$A^n_{G,2} = \sum_{k=1}^{n} S_k \; ; \; S_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} M_2[(x_{\beta_j})_{\beta_j}] \cdot \|(x_{\beta_k})_{\beta_k}\|_{G,2,E_k} .$$

Ici les familles de vecteurs $(x_{\beta_k})_{\beta_k} = (e_k)_k$ où $e_k = (S_{ki})_i$.

Dans le calcul de S_k il y a deux cas différents: $k = n$ ou $k \neq n$.

Si $k < n$:

$$S_k = (M_2[(e_j)_j]_{\ell^1})^{n-2} \cdot \|(e_j)_j\|_{G,2,\ell^1} \cdot M_2[(e_j)_j]_{\ell^2} \leq$$

$$\leq N^{(n-2)/2} \cdot N \cdot 1 = N^{n/2} .$$

Si $k = n$:

$$S_n = (M_2[(e_j)_j]_{\ell^1})^{n-1} \cdot \|(e_j)_j\|_{G,2,\ell^2} = N^{(n-1)/2} \cdot N^{\frac{1}{2}} = N^{\frac{n}{2}} .$$

Donc

$$A^n_{G,2} \leq nN^{\frac{n}{2}},$$

que nous allons substituer dans (3.2.6) pour avoir (3.3.1).

(3.4) Remarque: $K_1 = K_2 = \ldots = K_n$.

(3.5) Lemme: La norme M_0 de $(\alpha^o) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ comme forme multilinéaire est majorée par

(3.5.1) $$K_0 = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} N^{\frac{n+1}{2}} .$$

Démonstration. Dans ce cas il n'y a pas de différence entre les S_k et nous avons

$$S_k = (M_2[(e_j)_j]_{\ell^1})^{n-1} \cdot \|(e_j)_j\|_{G,r,\ell^1} \leq N^{\frac{n+1}{2}} .$$

Donc

$$A^o_{G,2} \leq n\, N^{\frac{n+1}{2}}$$

et

$$M_0 \leq K_0 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} N^{\frac{n+1}{2}}$$

d'après (3.2.6).

§ 4. Une application de la théorie de l'interpolation

Dans le § 3 nous avons estimé la norme des formes multilinéaires associées aux vertices d'un simplex de dimension n. Maintenant nous allons faire usage de la théorie de l'interpolation d'espaces de Banach pour étendre cette estimation à un multi-indice α arbitraire du simplex. Il est bien connu que la méthode complexe préserve les normes chez les formes multilinéaires extrémales, c'est cette méthode dont nous allons faire usage ici.

Avec la proposition (3.2) nous avons obtenu une borne supérieure K_j pour la norme de A comme forme multilinéaire

$$(4.1) \qquad (\alpha^j) \xrightarrow{A} \mathbb{C},$$

$K_j \in \{K_0, K_1\}$, voir rémarque (3.4), où α^j parcourt l'ensemble des $n+1$ vertices du simplex $|\alpha'| \leq \frac{1}{2}$. Maintenant, soit donné un point α arbitraire du simplex, il est trivial qu'il peut être obtenu par combinaison linéaire convexe des vertices, mais nous n'avons pas trouvé dans la littérature un résultat qui nous ait permis d'obtenir la norme de A comme une combinaison multiplicative-convexe des normes de A relative à chacun des vertices. Il nous faut donc choisir le chemin le plus long indiqué par le lemme (4.3).

A titre d'exemple nous allons donner ici deux résultats dont la démonstration peut être trouvé dans [1, chs.1,2] ainsi que le langage des lemmes qui suivront.

Donnés deux espaces ℓ^p et ℓ^q qui nous voulons interpoler nous en ferons référence en disant le couple (ℓ^p, ℓ^q). Après, quand il s'agira de l'interpolation des produits cartesiens identifiés par des multi-indices nous dirons, par exemple, le couple $((\alpha^i), (\alpha^j))$.

(4.2.1) (Théorème de Riez-Thorin). *Si* s, s' *sont positives*, $s + s' = 1$, *et donnés* p_0, p_1; $1 \leq p_0 \leq p_1$ *alors, pour* p;

$$1/p = s'/p_0 + s/p_1$$

ℓ^p est un espace d'interpolation entre les espaces ℓ^{p_0} et ℓ^{p_1}, dit l'espace d'exposant s.

(4.2.2) Si A est une forme linéaire

$$\ell^{p_0} \xrightarrow{A} \mathbb{C} \quad \text{avec norme } M_0$$

et

$$\ell^{p_1} \xrightarrow{A} \mathbb{C} \quad \text{avec norme } M_1$$

alors

$$\ell^{p} \xrightarrow{A} \mathbb{C} \quad \text{avec norme } M_0^{s'} M_1^{s},$$

où s, s' et p sont comme dans (4.2.1).

Dans la suite nous réservons les lettres s, s' pour représenter des pairs de nombres réels (exposants) conjugués: $s + s' = 1$, $s, s' \geq 0$. La terminologie décrite plus haut se généralise sans peine pour les produits cartésiens d'espaces (ou de couples) et maintient sa forme. Nous révenons aussi aux formes multilinéaires dans le lemme:

(4.3) Lemme: Soit $(\alpha^0) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ avec norme M_0 et $(\alpha^1 \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ avec norme M_1. Alors A peut être étendue continûment à

$$(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

avec norme $M_0^{s'} M_1^{s}$ où $\alpha = s'\alpha^0 + s\alpha^1$ et α^0, α^1 sont deux multi-indices arbitraires du simplex.

Démonstration. Voir [11, page 106].

(4.4) Lemme: Pour tout multi-indice γ; $|\gamma| = \frac{1}{2}$ et pour une matrice A dont la norme aux points extrémaux du simplex $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ est bornée par la même constante K_1, la norme de la forme

$$(\gamma) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$$

est bornée par la même constante K_1.

Démonstration. Puisque un tel multi-indice γ peut-être obtenu par interpolation d'au plus n couples (α^i,α^j), $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$, on applique successivement le lemme (4.3) a chacun des couples de produits cartesien

$$\overline{E}_{ij} = ((\alpha^i), (\alpha^j)) .$$

(4.5) Lemme: Il existe un multi-indice γ; $|\gamma| = \frac{1}{2}$ sur la ligne droite déterminée par les multi-indices $\alpha^0 = (0,\ldots,0)$ et α où α est un multi-indice arbitraire du simplex $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. Le multi-indice α divise le segment de droite $\overline{\alpha^0\gamma}$ déterminée par α^0 et γ dans le rapport

(4.5.1) $$2|\alpha| = s .$$

(4.6) Lemme: La norme de $(\alpha) \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ est M_α;

$$M_\alpha \leq K_\alpha = K_0^{s'} K_1^s = (\tfrac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} N^{\frac{n+1}{2}-|\alpha|}$$

puisque $s = 2|\alpha|$.

Démonstration. Par application du lemme (4.3) au couple

$$\overline{E} = ((\alpha^0) , (\gamma))$$

en tenant compte de (4.5.1), (3.3) et (3.5) .

(4.7) Théorème: L'exposant $\lambda = \frac{1}{1-|\alpha|}$ dans l'inégalité (L - H) est le meilleur possible.

Démonstration. Il faut comparer les membres à gauche et à droite dans (L - H). Nous avons maintenant

$$S_\alpha^\lambda = \sum_{\beta_i} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2 \Big)^{\lambda/2}$$

et donc

$$S_\alpha = N^{((n-1)\lambda+2)/2\lambda} = N^{(n+\frac{2-\lambda}{\lambda})/2} .$$

Mais

$$\frac{2-\lambda}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} - 1 = 2 - 2|\alpha| - 1 = 1 - 2|\alpha| = s'$$

selon (4.5.1), c'est à dire:

(4.7.1) $$S_\alpha = N^{\frac{n+1}{2}-|\alpha|} \quad , \text{ puisque } \quad s = 2|\alpha| \, .$$

D'après (4.6) nous avons:

(4.7.2) $$K_\alpha = C\, N^{\frac{n+1}{2}-|\alpha|} \quad , \quad C = (\tfrac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} \, .$$

C'est à dire que S_α et K_α sont de même ordre de grandeur par rapport à N et ce ne serait pas le cas pour $\lambda' = \lambda - \varepsilon;\ \varepsilon > 0$, ce qui prouve le théorème.

Le tableau suivant réunit toute l'information des §§ 3,4 :

(4.8)

	α^0	α	α^1
λ	1	$\frac{1}{1-\lvert\alpha\rvert}$	2
$\lvert\alpha\rvert$	0	$\lvert\alpha\rvert$	$\frac{1}{2}$
S_α	$N^{\frac{n+1}{2}}$	$N^{\frac{n+1}{2}-\lvert\alpha\rvert}$	$N^{\frac{n}{2}}$
K_α	$C\,N^{\frac{n+1}{2}}$	$C\,N^{\frac{n+1}{2}-\lvert\alpha\rvert}$	$C\,N^{\frac{n}{2}}$

(4.9) Rémarque: Si nous considérons les résultat de [8] nous pouvons maintenant écrire l'estimation suivante:

$$\frac{1}{C}\, S_\alpha \leq M_\alpha = \|A\| \leq K_\alpha \, ,$$

où C est la constante explicitée dans (4.7.2).

§ 5. Bibliographie

[1] Bergh, J. and Löfström, J., Interpolation Spaces, an introduction. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag.

[2] Chevet, S., Séries de Variables Aléaloires Gaussiennes à valeurs dans $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$ et application aux produits d'espaces de Wiener abstraits. Exposé no XIX, Séminaire sur la Géometrie des espaces de Banach (1977-1978) de l'École Polytechnique - Palaiseau, France.

[3] Chung, K.L., A course in Probability. Academic Press (Series of monographs and textbooks in Probability and Mathematical Statistics) 1974.

[4] Hardy, G. and Littlewood, J.E., Bilinear forms bounded in space [p,q]. Quaterly J. of Mathematics 5 (1934).

[5] Hardy, G., Littlewood, J.E. and Pólya, Inequalities. Cambridge University Press.

[6] Kaijser, S., Some results in the metric theory of tensor products. Studia Mathematica, T. LXIII (1978).

[7] Littlewood, J.E., On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Quarterly J. of Mathematics, 1 (1930).

[8] Praciano-Pereira, T., On bounded multilinear forms on a class of ℓ^p spaces. U.U.D.M. Report No. 1979:4 .

[9] Davie, A.M., Quotients of uniforms Algebras. J. London Math. Soc (2) 7 (1973).

[10] Fernique, X., École d'Été de probabilités de Saint-Flour IV - 1974, Lectures Notes in Mathematics, nr 480.

[11] Zygmund, A., Trigonometric Series, Vol. II. Cambridge University Press 1968.